

Empiryczna ocena dokładności zwykłych wzorów dendrometrycznych dla strzał bez kory modrzewia europejskiego *Larix decidua* Mill.

Empirical evaluation of the accuracy of dendrometric formulas for European larch *Larix decidua* Mill. stems without bark

Lukasz Hawranik, Robert Tomusiak* 

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Instytut Nauk Leśnych, Katedra Urządzania Lasu, Dendrometrii i Ekonomiki Leśnictwa, ul. Nowoursynowska 159; 02-776 Warszawa, Polska

*Tel. +48 22 5938088, 786849075, e-mail: robert_tomusiak@sggw.edu.pl

Abstract. To determine the volume of felled trees, dendrometric formulas are used that are the product of a specific cross-section and the length of a dendrometric solid. In order to apply these formulas on a larger scale, it is essential to know their accuracy. Most of the research on the accuracy of dendrometric formulas has been carried out using Scots pine with other tree species, including European larch *Larix decidua* Mill., often being overlooked. The aim of this study was to assess the accuracy of eight common dendrometric formulas for stems of European larch without bark. The research material consisted of 290 larch stems from two forest districts (Pińczów and Prudnik), representing trees from age classes II to V and older.

The following formulas were observed to be highly accurate: Huber's, French, Hossfeld's, Gieruszynski's and the two-halves formula. Huber's formula provided the mean value of percentage errors closest to zero (0.8%) and was the most accurate formula, whereas the two-halves formula, showed the lowest variability of percentage errors (standard deviation 3.1%). However, all formulas tended to generate systematic errors with the merchant's and two-halves formulas underestimating the volume, while the others overestimated the volume.

Most of the formulas' accuracy was uniform across the different age classes with the exception of the Smalian's and Rieckie-Newton's formulas, that were significantly less accurate when applied to the V and older age classes, and the merchant's formula, characterized by greater accuracy in the V and older age classes. Pair-wise comparisons of the formulas' accuracy revealed significant differences between most of the analyzed pairs of formulas though no differences were found between the French and Gieruszynski, French and Hossfeld, Gieruszynski and Hossfeld, Gieruszynski and Huber formulas as well as between the Hossfeld and Huber formulas.

Keywords: volume, secondary percentage errors, Huber's formula, Smalian's formula, Gieruszyński's formula, Hossfeld's formula, French formula, Rieckie-Newton's formula, two-halves formula, merchant's formula

Słowa kluczowe: miąższość, błędy procentowe wtórne, wzór środkowego przekroju, wzór Smaliana, wzór Gieruszyńskiego, wzór Hossfelda, wzór francuski, wzór Rieckiego-Newtona, wzór dwupołkowy, wzór kupiecki

1. Wstęp

Do określania miąższości drewna leżącego stosowane są wzory dendrometryczne. Znaczną ich grupę stanowią tzw. wzory zwykłe, będące iloczynem długości bryły dendrometrycznej i przekroju poprzecznego pnia, który może być odzwierciedleniem grubości w wybranym miejscu na strzale, bądź też średnią z kilku miejsc. W praktyce leśnictwa zalecane jest stosowanie wzorów o prostej budowie i wysokiej dokładności uzyskanych wyników. W Polsce najczęściej stosowany jest wzór środkowego przekroju, zwany również wzorem Hubera. Do określenia

miąższości tym wzorem niezbędna jest jedynie znajomość długości bryły dendrometrycznej i środkowej średnicy.

Powszechne stosowanie wzorów dendrometrycznych w gospodarce leśnej wymaga znajomości ich dokładności teoretycznej i empirycznej. Dokładność teoretyczna wskazuje, jakie wielkości błędów procentowych wtórnych można uzyskać przy określaniu objętości regularnych brył obrotowych, stosując dany wzór dendrometryczny. Dokładność empiryczna służy do poznania wielkości błędów danego wzoru przy określaniu miąższości brył dendrometrycznych, np. strzał, dłużyc, kłód itp.

Wpłynęło: 19.11.2021 r., recenzowano: 9.12.2021 r., zaakceptowano: 30.12.2021 r.

Skala wykorzystania wzoru środkowego przekroju sprawia, że wiele prac naukowych poświęcono zbadaniu jego dokładności. Analiza dokładności teoretycznej dla regularnych brył obrotowych wskazuje, iż wzór Hubera jest bezbłędny dla walca i paraboloidy (Gieruszyński 1953a). Problematyką związaną z oceną dokładności empirycznej wzoru środkowego przekroju zajmowało się wielu badaczy, m.in. Gieruszyński (1953a), Lemke (1981), Meixner (1994), Grodzki (1968), Wiant i in. (1996). W większości tych prac wykazano, że wzór Hubera wykazuje tendencję do nieznacznego zawyżania miąższości badanych sortymentów bez kory i również niewielkiego zaniżenia miąższości w korze. Z uwagi na jego prostotę i dokładność nie negowano jego wykorzystania w leśnictwie.

Większość z prac oceniających dokładność wzoru środkowego przekroju dotyczy sosny. Brakuje prac dla innych gatunków, m.in. dla modrzewia, który jest najbardziej światłolubnym gatunkiem iglastym występującym w Polsce i dostarczającym bardzo cennego surowca drzewnego (Szramka 1997). Ważne jest zatem poznanie, jakiej dokładności empirycznej można spodziewać się przy określaniu miąższości strzał modrzewia bez kory za pomocą wzoru Hubera, stosowanego przy odbiorze drewna wszystkich gatunków drzew w Polsce, jak również innych wzorów zwykłych, co pozwoliłoby na wskazanie wzoru najbardziej odpowiedniego do określania miąższości tego gatunku. Stąd też celem niniejszej pracy jest ocena dokładności różnych wzorów zwykłych przy określaniu miąższości strzał bez kory modrzewia europejskiego *Larix decidua* Mill.

2. Materiał i metody

Materiał empiryczny stanowiący podstawę badań obejmował wyniki pomiaru drzew leżących z terenu Nadleśnictwa Pińczów (14 powierzchni badawczych) i Nadleśnictwa Prudnik (15 powierzchni). Wybór powierzchni do badań przeprowadzono zgodnie z zaproponowaną przez Bruchwalda metodyką budowy modeli wzrostu (Bruchwald, Zasada 2010). Zgodnie z tą koncepcją drzewostany wytypowane do badań nie mogły się znajdować, zarówno w przeszłości, jak i w trakcie pomiarów, pod wpływem czynników szkodotwórczych. Wybierano lite drzewostany modrzewiowe, w których dopuszczalny udział innych gatunków w pierwszej warstwie nie mógł przekroczyć 20%. Jeśli w drzewostanie występowały inne gatunki, to powierzchnie próbne zakładane były w miejscach, w których dominował modrzew. W tych miejscach ścinano również drzewa próbne.

Drzewostany wybrane do badań reprezentowały żywe siedliska lasowe oraz różne klasy wieku. W II klasie wieku znalazło się 5 powierzchni badawczych, w III – 13, w IV – 6, a w V i starszych – 5. Wszystkie drzewostany uwzględnione w niniejszej pracy charakteryzowały się I klasą bonitacji.

W wybranych w ten sposób drzewostanach wykonano wiele pomiarów, które posłużyły do zbudowania modelu wzrostu modrzewia. Pomiarami objęte zostały zarówno drzewa stojące, jak i drzewa ścięte. W niniejszej pracy wykorzystano materiał badawczy obejmujący wyniki pomiarów drzew ściętych. W każdym z 29 drzewostanów wytypowano do ścięcia po 10

drzew próbnych. Reprezentowały one różne stanowiska biosocjalne w następujących proporcjach:

- I klasa Krafta (drzewa górujące) – 1 drzewo,
- II klasa Krafta (drzewa panujące) – 2 drzewa,
- III klasa Krafta (drzewa współpanujące) – 3 drzewa,
- IVa klasa Krafta (drzewa opanowane ze ścięsnionymi koronami o wolnym wierzchołku) – 2 drzewa,
- IVb klasa Krafta (drzewa opanowane z koronami jeszcze bardziej ścięsnionymi) – 1 drzewo,
- Va klasa Krafta (drzewa przygłuszone z żywymi koronami) – 1 drzewo.

Materiał badawczy uwzględniony w niniejszej pracy reprezentuje drzewostany modrzewiowe w wieku od 21 do 147 lat. Ich przeciętne pierśnice obejmują zakres od 8,7 cm do 59,6 cm, a przeciętne wysokości znajdują się w przedziale od 10,5 m do 37,5 m.

Strzały wszystkich drzew wykorzystane w niniejszej pracy zostały pomierzone w sekcjach dwumetrowych. Za pomocą średnicomierza precyzyjnego dokonano pomiaru grubości pnia w środku każdej sekcji, w dwóch prostopadłych względem siebie kierunkach. W miejscach pomiaru średnic wykonano dwa pomiary grubości kory przy zastosowaniu koromierza.

Uzyskane wyniki pomiarów pozwoliły na obliczenie miąższości strzały bez kory za pomocą następujących wzorów dendrometrycznych:

wzór dwupołówkowy (1)

$$V = \left(g_{\frac{l}{4}} + g_{\frac{3l}{4}} \right) \cdot \frac{l}{2},$$

wzór francuski (2)

$$V = \left(\frac{0,1}{2} \right)^2 \cdot 2l,$$

wzór Gieruszyńskiego (3)

$$V = \left(0,23 \cdot g_{\frac{l}{10}} + 0,58 \cdot g_{\frac{l}{2}} + 0,19 \cdot g_l \right) \cdot l$$

wzór Hossfelda (4)

$$V = \frac{3g_l + g_l}{4} \cdot l,$$

wzór środkowego przekroju (Hubera) (5)

$$V = \frac{g_l}{2} \cdot l$$

wzór kupiecki (6)

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{d_0 + d_l}{2} \right)^2 \cdot l$$

wzór Rieckiego-Newtona (7)

$$V = \frac{g_0 + 4g_l + g_l}{6} \cdot l,$$

wzór Smaliana (8)

$$V = \frac{g_0 + g_l}{2} \cdot l$$

W celu ustalenia dokładności przedstawionych wyżej wzorów niezbędne było wyznaczenie miąższości rzeczywistej. Za taką przyjęto miąższość obliczoną wzorem sekcyjnym środkowego przekroju:

$$V = l_s \cdot (g_{s1} + g_{s2} + \dots + g_{sn}) + V_a \quad (9)$$

Symbole w prezentowanych wzorach oznaczają kolejno:

V – miąższość [m^3],

l – długość [m],

g – pole przekroju [m^2],

d – średnica [m],

O – obwód [m].

Dla każdej strzały obliczono błąd procentowy wtórny (p) każdego z ośmiu ocenianych wzorów, zgodnie z formułą:

$$V = \frac{V_{1-8} - V_{rzecz}}{V_{rzecz}} \cdot 100$$

Stanowi on wyrażoną w procentach różnicę między miąższością obliczoną ocenianym wzorem (wzory 1–8) a miąższością uznaną za rzeczywistą (wzór 9). Wielkości błędów procentowych wtórnych były podstawową miarą dokładności wzorów i posłużyły jako zmienne do dalszych analiz.

Wykonano szereg analiz obejmujących statystyczną charakterystykę wielkości błędów (średnia, mediana, minimum, maksimum, kwartył dolny, kwartył górny, rozstęp, rozstęp kwartyłowy, odchylenie standardowe, skośność, kurtoza, liczba błędów dodatnich i ujemnych), ich prezentację graficzną (histogramy z rozkładem błędów dla każdego wzoru, wykresy pudełkowe ilustrujące zakres wielkości błędów dla poszczególnych wzorów) oraz testy statystyczne porównujące przeciętne wielkości błędów między grupami (między klasami wieku oraz między wzorami).

Sprawdzono, czy oceniane wzory wykazują tendencję do generowania błędów systematycznych, tj. stałą tendencję do zawyżania bądź zaniżania miąższości. Zastosowano do tego celu test t dla pojedynczej próby przy stałej odniesienia równej zero. Hipoteza zerowa, wskazująca średnią wielkość błędów 0% oznacza, że błędy ocenianego wzoru dla większej zbiorowości (populacji, z której pobrano próbę) się znoszą, a więc następuje redukcja błędów.

W kolejnym etapie porównano dokładność wzorów pomiędzy klasami wieku, wykorzystując jednoczynnikową analizę wariancji (ANOVA). Analiza ta pozwoliła na sprawdzenie, czy występują istotne różnice w przeciętnych wielkościach błędów pomiędzy klasami wieku. W przypadku gdy zaobserwowano istnienie różnic między średnimi ($p \leq 0,05$) wykonano test porównań wielokrotnych Tukeya, który pozwolił wykazać wszystkie pary klas wieku różniące się istotnie średnią wielkością błędów.

Kolejną analizą było porównanie dokładności między wzorami. Z uwagi na fakt, że wielkości błędów poszczególnych wzorów różniły się zmiennością (niespełnione założenie do analizy wariancji z powtarzanymi pomiarami), zastosowano analizę wariancji powtarzanych pomiarów dla rangi Friedmana.

Anova Friedmana w hipotezie zerowej zakłada równość median dla wszystkich porównywanych grup. W niniejszej pracy były to mediany błędów procentowych wtórnych dla wszystkich porównywanych wzorów. W przypadku gdy zaobserwowano istnienie istotnych różnic między medianami ($p \leq 0,05$) wykonano test porównań wielokrotnych Wilcozona z poprawką Bonferro-niego, który wykazał wszystkie pary ocenianych wzorów dendrometrycznych różniące się istotnie wielkością mediany.

Weryfikację wszystkich testów statystycznych przeprowadzono przy poziomie istotności 0,05.

3. Wyniki

Błędy wzoru Hubera przyjmują wartości z przedziału od $-29,2\%$ do $32,7\%$, ze średnią wartością $0,8\%$ (tab. 1). Dla 162 drzew (56% zbiorowości) wzór Hubera wykazał błędy dodatnie, a dla 128 drzew (44%) błędy ujemne. Biorąc pod uwagę odchylenie standardowe $6,8\%$ można stwierdzić, że typowe wielkości błędów tego wzoru mieszczą się w zakresie od $-6,0\%$ do $7,6\%$. Wartość mediany wskazuje, że błędy wzoru Hubera dla połowy drzew w badanym zbiorze nie przekraczają $1,2\%$. Kwartył dolny wyniósł $-2,6\%$, co świadczy o tym, że jedna czwarta obserwacji przyjmuje wartości mniejsze lub równe $-2,6\%$, zaś kwartył górny wskazuje, że dla trzech czwartych zbiorowości błędy wzoru Hubera są mniejsze lub równe $4,7\%$. Rozstęp przedziału między kwartylami wyniósł $7,3\%$, co wskazuje, że w tym przedziale znajduje się połowa wszystkich obserwacji. Rozstęp błędów wyniósł $61,9\%$. Rozkład błędów jest symetryczny (skośność $0,0$). Duża koncentracja wartości błędów wokół średniej (kurtoza $2,7$) świadczy o rozkładzie leptokurtycznym.

Błędy wzoru Smaliana przyjmują wartości z przedziału od $3,1\%$ do $209,9\%$, ze średnią wartością $66,6\%$ (tab. 1). Dla wszystkich 290 drzew wzór Smaliana wykazał błędy dodatnie (zawyżanie miąższości strzał bez kory). Typowe wielkości błędów tego wzoru mieszczą się w zakresie od $36,0\%$ do $97,2\%$. Wartość mediany wskazuje, że błędy wzoru Smaliana dla połowy drzew w badanym zbiorze nie przekraczają $64,5\%$. Dla jednej czwartej drzew wzór daje błędy nie większe od 47% (kwartył dolny); dla takiej samej liczby drzew uzyskano wielkości błędów nie mniejsze od $80,9\%$ (kwartył górny). Rozstęp przedziału między kwartylami wyniósł $34,0$, co wskazuje, że w tym przedziale znajduje się 50% obserwacji. Rozstęp błędów wyniósł $206,8\%$. Rozkład błędów charakteryzuje się umiarkowaną asymetrią prawostronną. Duża koncentracja wartości błędów wokół średniej (kurtoza $2,3$) świadczy, iż jest to rozkład leptokurtyczny.

Błędy wzoru Hossfelda przyjmują wartości z przedziału od $-17,2\%$ do $13,9\%$, ze średnią wartością $1,4\%$ (tab. 1). Dla 192 drzew wzór Hossfelda wykazał błędy dodatnie, a dla 98 drzew błędy ujemne. Typowe wielkości błędów tego wzoru mieszczą się w zakresie od $-3,2\%$ do $6,0\%$. Wartość mediany wskazuje, że błędy wzoru Hossfelda dla połowy drzew w badanym zbiorze nie przekraczają $1,5\%$. 25% obserwacji jest mniejsze lub równe wartości $-1,3\%$ (kwartył dolny) i tyle samo obserwacji jest większe od $4,2\%$ (kwartył górny). Rozstęp błędów wyniósł $31,2\%$. Rozkład błędów charakteryzuje się bardzo słabą asymetrią lewostronną. Koncentracja warto-

ści błędów wokół średniej (kurtoza 0,7) świadczy, iż jest to rozkład mezokurtyczny.

Błędy wzoru Rieckiego-Newtona przyjmują wartości z przedziału od 2,4% do 73,1%, ze średnią wartością 22,8% (tab. 1). Podobnie jak wzór Smaliana dla wszystkich 290 drzew wzór Rieckiego-Newtona wykazał błędy dodatnie (zawyżanie miąższości strzał bez kory). Typowe wielkości błędów tego wzoru mieszczą się w zakresie od 13,0% do 32,6%, a połowa wielkości błędów jest większa lub równa wartości 21,4%. O dużej zmienności błędów świadczy rozstęp, który wyniósł 70,7%. Rozkład błędów charakteryzuje się umiarkowaną asymetrią prawostronną i jest rozkładem leptokurtycznym.

Błędy wzoru francuskiego przyjmują wartości z przedziału od -28,9 do 33,3%, ze średnią wartością 1,3% (tab. 1). Dla 179 drzew wzór francuski wykazał błędy dodatnie, a dla 111 błędy ujemne. Wartości typowe błędów tego wzoru nie odbiegają od średniej arytmetycznej o więcej niż 6,8%. Szerokość przedziału międzykwartylnego wyznaczają wartości -2,2% (kwartyl dolny) i 5,2%. Rozstęp całkowity błędów wyniósł 62,2%. Rozkład błędów wzoru francuskiego jest symetryczny i charakteryzuje się dużą koncentracją wartości błędów wokół średniej (kurtoza 2,7).

Błędy wzoru kupieckiego przyjmują wartości z szerokiego przedziału od -48,4% do 55,0%, ze średnią wartością -16,7% (tab. 1). Jedynie dla 34 drzew wzór kupiecki wykazał błędy dodatnie, a dla pozostałych 256 drzew błędy ujemne. W przypadku tego wzoru wartości typowe, mieszczące się w zakresie od -32,0% do -1,4%, mają ujemny znak. Błędy wzoru kupieckiego dla połowy drzew w badanym zbiorze przyjmują wartości niższe od -17,8%. Kwartyl dolny dla tej zmiennej wyniósł -26,5%, a kwartyl górny -9,5%, zatem 50% obserwacji znajdujących się w przedziale międzykwartylnym również przyjmuje wartości ujemne. O dużej zmienności błędów tego wzoru świadczy wartość odchylenia standardowego (15,3%) oraz rozstęp, który wskazuje, że maksymalna różnica wielkości błędów dla dwóch drzew wynosi aż 103,4%. Rozkład błędów wzoru kupieckiego jest rozkładem leptokurtycznym i charakteryzuje się umiarkowaną asymetrią prawostronną.

Błędy wzoru Gieruszyńskiego przyjmują wartości z przedziału od -8,1% do 16,6%, ze średnią wartością 1,7% (tab. 1). Dla 207 drzew wzór Gieruszyńskiego wykazał błędy dodatnie, a dla 83 błędy ujemne. Niewielka wartość odchylenia standardowego (3,4%) sprawia, że typowe wielkości błędów tego wzoru mieszczą się w zakresie od -1,7% do 5,1%. Wartość mediany wskazuje, że błędy wzoru Gieruszyńskiego dla połowy drzew w badanym zbiorze nie przekraczają 1,6%. Przedział międzykwartylny, w którym znajduje się połowa położonych najbardziej pośrodku obserwacji, wyznaczają wartości -0,4% i 3,9%. Maksymalna różnica błędów wyniosła 24,6%. Rozkład błędów charakteryzuje się słabą asymetrią prawostronną i wielkością kurtozy 1,5.

Błędy wzoru dwupołówkowego przyjmują wartości z przedziału od -11,6% do 7,6%, ze średnią wartością -3,1% (tab. 1). Dla 45 drzew wzór dwupołówkowy wykazał błędy dodatnie, a dla 245 wykazał błędy ujemne, przy czym, z uwagi na najmniejsze odchylenie standardowe spośród ocenianych wzorów, typowe wielkości błędów mieszczą się w przedziale od -6,2% do 0%. Wartość mediany wskazuje, że błędy wzoru

dwupołówkowego dla połowy drzew w badanym zbiorze nie przekraczają -3,2%. Kwartyl dolny i górny przyjmuje wartości ujemne (odpowiednio -4,9% i -1,0%). Rozstęp błędów wyniósł 19,2%. Rozkład błędów jest prawie symetryczny (skośność 0,1), a koncentracja wartości błędów wokół średniej zbliżona do rozkładu normalnego (kurtoza 0,3) wskazuje na mezokurtyczny charakter rozkładu.

Test *t* dla pojedynczej próby przy stałej odniesienia zero wykazał tendencję do generowania błędów systematycznych ($p \leq 0,05$) dla wszystkich ocenianych wzorów (tab. 1). Wzory Hubera, Smaliana, Hossfelda, Rieckiego-Newtona, francuski i Gieruszyńskiego zawyżyły miąższość strzały bez kory. Natomiast wzory kupiecki i dwupołówkowy charakteryzowały się stałą tendencją do zaniżania wyników.

Rozkłady błędów przedstawiono w postaci graficznej. Histogramy, ukazujące liczbę drzew w określonych przedziałach wielkości błędów każdego wzoru, przedstawiono na ryc. 1. Z kolei na ryc. 2 w sposób syntetyczny porównano zakresy błędów poszczególnych wzorów, ich wielkości typowe oraz wartości przeciętne (mediany). Z porównania rozkładów można wnioskować, że najmniejszym zakresem błędów charakteryzował się wzór dwupołówkowy, a największym – wzór Smaliana. Dla wzorów Rieckiego-Newtona, kupieckiego i Smaliana przedziały wartości typowych nie zawierają zera.

Wielkości błędów procentowych wtórnych ocenianych wzorów porównano między klasami wieku, wykorzystując jednoczynnikową analizę wariancji. Dla większości wzorów nie stwierdzono istotnego wpływu wieku na ich dokładność. Jedynie w przypadku wzorów Smaliana ($F=5,150$; $p=0,002$), Rieckiego-Newtona ($F=5,084$; $p=0,002$) i kupieckiego ($F=5,150$; $p=0,002$) wiek różnicował dokładność. Dla wymienionych wzorów dokładność określania miąższości strzał bez kory w V i starszych klasach wieku istotnie różniła się od dokładności w klasie II, III i IV.

Kolejna analiza obejmowała porównanie dokładności wszystkich wzorów. Na podstawie analizy wariancji powtarzanych pomiarów dla rang Friedmana stwierdzono, że w zestawie ocenianych wzorów istnieją wzory, które istotnie różnią się dokładnością ($p < 0,0001$). W takiej sytuacji konieczne było wykonanie testu porównań wielokrotnych (test Wilcozona z poprawką Bonferroniego), który dla większości analizowanych par wzorów wykazał istotne różnice w dokładności określania miąższości strzał modrzewia bez kory (ryc. 3).

Jedynie w pięciu przypadkach dokładność wzorów kształtowała się na podobnym poziomie. Nie stwierdzono istotnych różnic między dokładnością wzoru francuskiego i Gieruszyńskiego, francuskiego i Hossfelda, Gieruszyńskiego i Hossfelda, Gieruszyńskiego i Hubera oraz między wzorem Hossfelda i Hubera.

4. Dyskusja

Modrzew europejski jest gatunkiem często pomijanym w badaniach naukowych z zakresu dendrometrii, a w licznych inwentaryzacjach zasobów leśnych bywa łączony z sosną. Jest gatunkiem dostarczającym cenny sortyment na rynek. Z uwagi na jego udział w polskich lasach, jak i jego znaczenie, warto poznać dokładność określania miąższości dla tego gatunku.

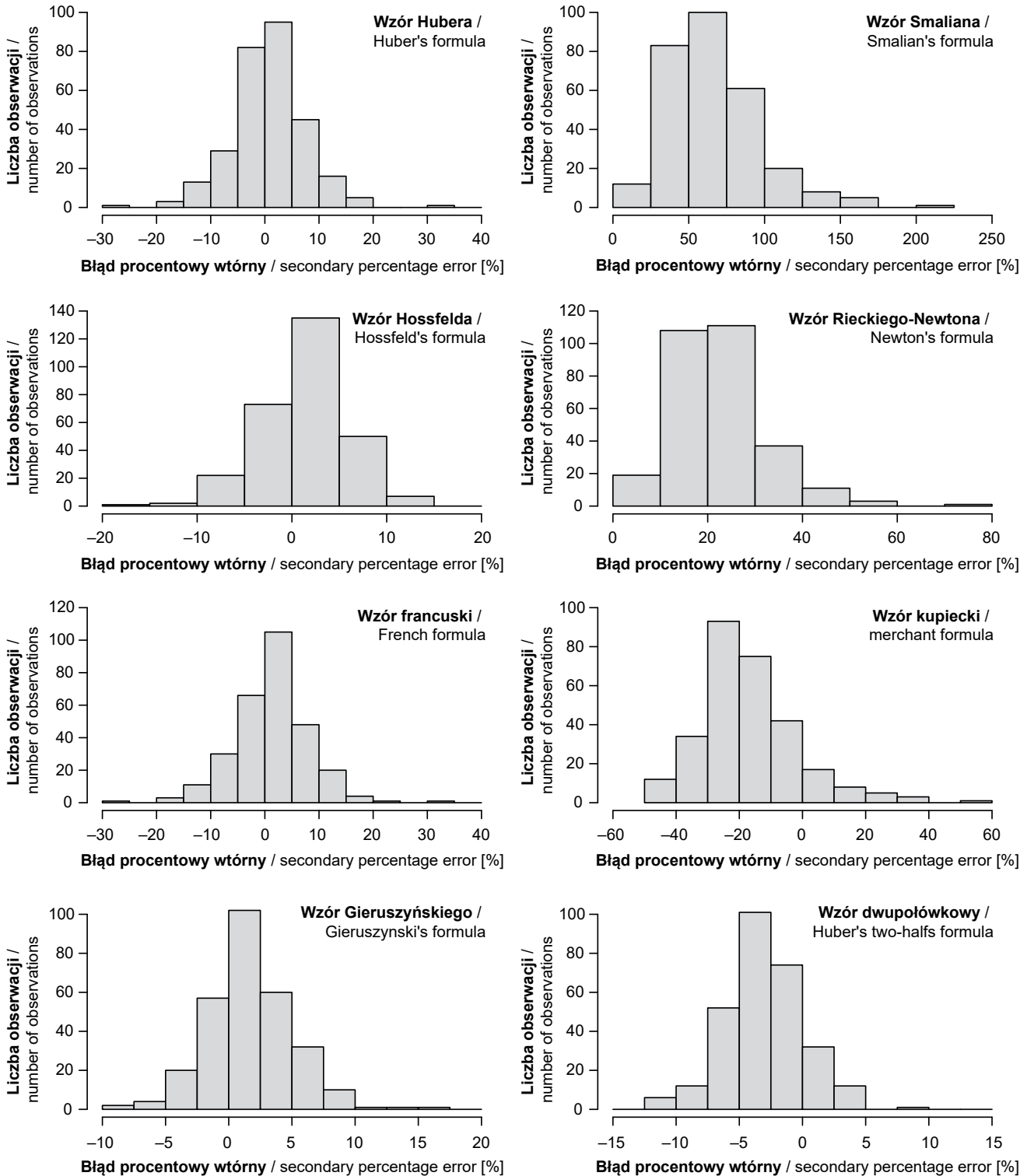
Tabela 1. Statystyczna charakterystyka wielkości błędów procentowych wtórnych
 Table 1. Summary statistics of the secondary percentage errors for the evaluated formulas

Miara statystyczna Statistical measure	Wzór dendrometryczny / Dendrometric formula							
	Hubera Huber	Smaliana Smalian	Hossfelda Hossfeld	Rieckiego- -Newtona Newton	francuski French	kupiecki merchant	Gieruszyń- skiego Gieruszyn- ski	dwupółow- kowy Huber's two-halves
Liczba obserwacji Number of observations	290	290	290	290	290	290	290	290
Średnia / Mean	0,8	66,6	1,4	22,8	1,3	-16,7	1,7	-3,1
Mediana / Median	1,2	64,5	1,5	21,4	1,7	-17,8	1,6	-3,2
Minimum / Minimum	-29,2	3,1	-17,2	2,4	-28,9	-48,4	-8,1	-11,6
Maksimum / Maximum	32,7	209,9	13,9	73,1	33,3	55,0	16,6	7,6
Kwartyl dolny / Lower quartile	-2,6	47,0	-1,3	16,7	-2,2	-26,5	-0,4	-4,9
Kwartyl górny / Upper quartile	4,7	80,9	4,2	27,7	5,2	-9,5	3,9	-1,0
Rozstęp / Range	61,9	206,8	31,2	70,7	62,2	103,4	24,6	19,2
Rozstęp kwartylowy Interquartile range	7,3	34,0	5,5	11,1	7,4	17,0	4,3	3,9
Odch. Standardowe Standard deviation	6,8	30,6	4,6	9,8	6,8	15,3	3,4	3,1
Skośność / Skewness	0,0	1,1	-0,2	1,0	0,0	1,1	0,3	0,1
Kurtoza / Kurtosis	2,7	2,3	0,7	2,6	2,7	2,3	1,5	0,3
Liczba błędów ujemnych / Number of negative errors	128	0	98	0	111	256	83	245
Liczba błędów dodatnich / Number of positive errors	162	290	192	290	179	34	207	45
Test t dla pojedynczej próby (p) / One-sample t test (p-value)	0,038	$p < 0,001$	$p < 0,001$	$p < 0,001$	0,001	$p < 0,001$	$p < 0,001$	$p < 0,001$

Najczęściej przy określaniu miąższości drzew stosowany jest wzór środkowego przekroju; wzór ten jest również najczęściej badanym w literaturze. Stąd też jednym z najważniejszych celów niniejszej pracy była ocena dokładności wzoru środkowego przekroju dla strzał modrzewia europejskiego. Dzięki obszernemu materiałowi empirycznemu, obejmującemu wyniki pomiarów 290 drzew, stwierdzono, iż średnia arytmetyczna błędów wzoru środkowego przekroju wynosi 0,8%, z odchyleniem standardowym równym 6,9%. Przeważały błędy dodatnie, które uzyskano dla 57,9% badanych drzew. Wzór ten wykazał tendencję do generowania błędów systematycznych, choć były to niewielkie wartości. Porównując błędy procentowe wzoru

środkowego przekroju w obrębie klas wieku, nie stwierdzono istotnych różnic ich średnich wielkości, co wskazuje na podobną dokładność przy określaniu miąższości drzew młodszych i starszych.

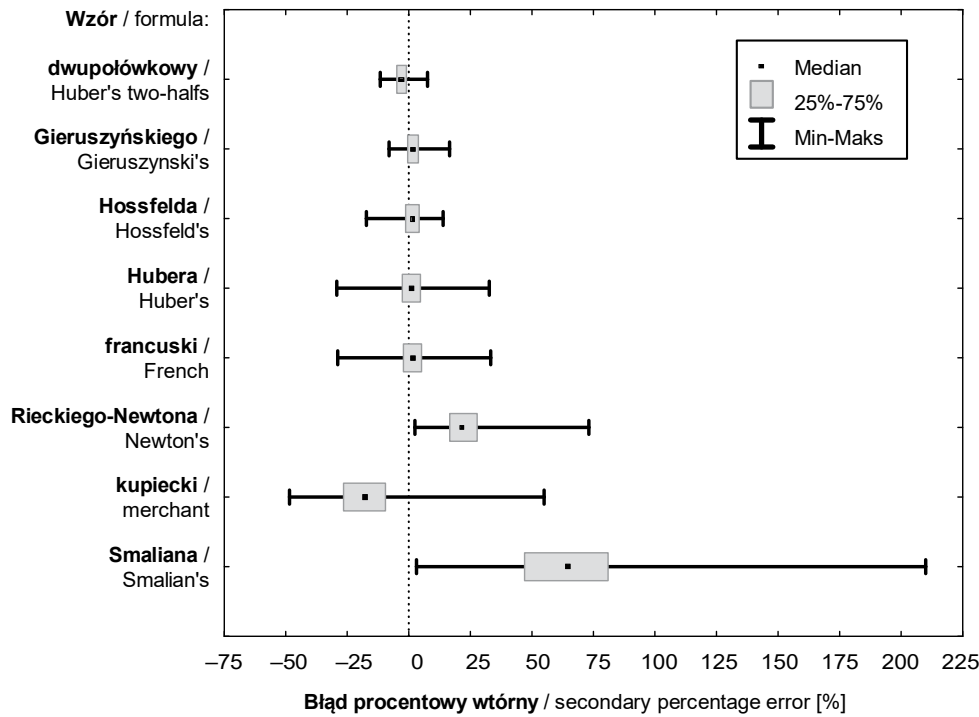
Większość prac badających dokładność wzorów zwykłych była prowadzona na materiale empirycznym reprezentującym najważniejszy gatunek lasotwórczy w Polsce – sosnę zwyczajną *Pinus sylvestris* L. Jedną z takich prac była praca Lemkego (1981), w której dokonano oceny dokładności wzorów zwykłych dla strzał bez kory sosny zwyczajnej. Średnia arytmetyczna błędów wzoru środkowego przekroju wyniosła 2,8%, z odchyleniem standardowym równym 6,5%. Dla ponad dwóch trzecich strzał (68,7%) uzyskano błędy dodatnie.



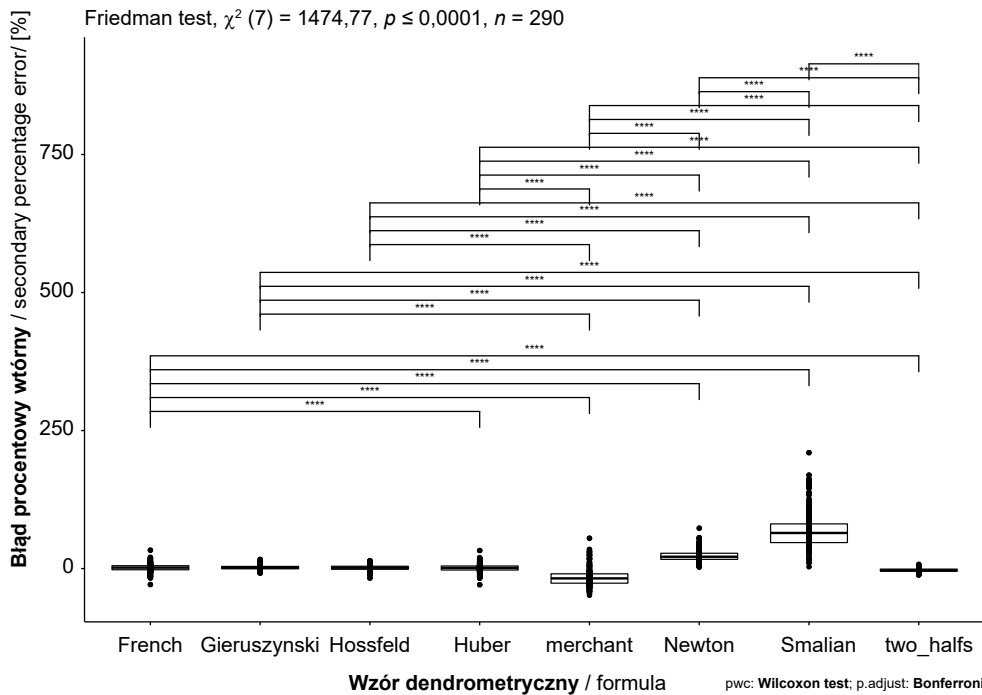
Rycina 1. Histogramy błędów procentowych wtórnych ocenianych wzorów
 Figure 1. Histograms of the secondary percentage errors for the evaluated formulas

Meixner (1994) zbadał dokładność wzorów dendrometrycznych w czterech drzewostanach sosnowych zróżnicowanych pod względem wieku. Obiektem pomiaru były strzały w korze, dla których średnie arytmetyczne błędów procentowych wtórnych wzoru Hubera przyjmowały wartości ujemne. Dla najmłodszego drzewostanu (35 lat) wartość

tej miary wyniosła $-3,4\%$. W drzewostanie 77 i 78-letnim średnia przyjęła wartość $-5,9\%$, a w drzewostanie 80-letnim $-4,1\%$. Zmienność błędów procentowych wtórnych mieściła się w przedziale od $6,6\%$ w drzewostanie 77-letnim do $7,3\%$ w drzewostanie 80-letnim. We wszystkich drzewostanach liczba błędów ujemnych przeważała nad błędami dodatnimi.



Rycina 2. Porównanie rozkładów błędów procentowych wtórnych dla ocenianych wzorów
 Figure 2. Comparison of the secondary percentage error distributions for the evaluated formulas



Rycina 3. Porównanie dokładności wzorów z wykorzystaniem analizy wariancji powtarzanych pomiarów dla rang Friedmana i testu *post-hoc* Wilcoxona z poprawką Bonferroni (oznaczenia wzorów o innej nazwie niż nazwisko autora: French – francuski, merchant – kupiecki, two_halves – dwupołówkowy)
 Figure 3. Comparing the accuracy of the formulas using the analysis of variance of repeated measures for Friedman ranks and the *post-hoc* Wilcoxon test with Bonferroni correction

Podobna prawidłowość została przedstawiona w pracy Wianta i in. (1996) na materiale empirycznym reprezentującym kilka gatunków liściastych z zachodniej Wirginii, gdzie błędy ujemne wzoru Hubera przeważały nad błędami dodatnimi.

Bruchwald (1999) zbadał dokładność wzoru środkowego przekroju w 94-letnim drzewostanie sosnowym pochodzącym z Puszczy Piskiej. Dla strzał w korze średnia arytmetyczna błędów procentowych wyniosła -1,8%, a dla 65% drzew uzyskano błędy ujemne. Z kolei dla strzał bez kory średnia

była wyższa i wyniosła 5,7%; w tym przypadku dla 88% drzew stwierdzono błędy dodatnie. Są one znacznie wyższe niż błędy stwierdzone w niniejszej pracy dla modrzewia.

Obiektem zainteresowań stały się też inne bryły dendrometryczne. Grodzki (1968) ocenił dokładność wzoru Hubera przy pomiarach długości kopalniakowych w zależności od grubości środkowej. Dla kopalniaków o grubości środkowej z przedziału 8–11 cm średnia arytmetyczna błędów procentowych wtórnych wyniosła -1,2%. Wzór Hubera okazał się najbardziej dokładny

dla kopalniaków o grubości środkowej między 12 a 15 cm, gdzie średnia arytmetyczna błędów wyniosła 0,1%. Z kolei dla kopalniaków o największej grubości środkowej (przedział 16–17 cm) średnia arytmetyczna błędów przyjęła wartość 2,0%. Zaobserwowano, że dla całości materiału błędy dodatnie i ujemne przy pomiarach dłużyc kopalniakowych w znaczącym stopniu ulegają zniesieniu. W pracy tej udowodniono, iż stosowanie wzoru środkowego przekroju przy obliczaniu miąższości dłużyc kopalniakowych jest uzasadnione, ponieważ wzór ten w tym przypadku daje bardzo dokładne wyniki.

W pracy Polkowskiego i in. (2019) zbadano dokładność wzoru środkowego przekroju dla części strzały od podstawy do miejsca, gdzie grubość bez kory wynosi 14 cm (drewno wielkowymiarowe wg normy PN-D-95000:2002). Wyniki wykazały, że w zależności od zastosowanego sposobu potrącenia grubości kory, można zaobserwować różną dokładność określania miąższości dłużyc bez kory. Przy tablicowym potrąceniu grubości kory wg ww. normy (1 cm dla dłużyc o grubości środkowej do 24 cm; 2 cm dla grubości 25–34 cm i 3 cm dla grubości od 35 cm) średnia arytmetyczna błędów procentowych wtórnych wyniosła –10,6%, z odchyleniem standardowym 5,0%. W drugim wariancie, gdzie odejmowano grubość kory pomierzoną koromierzem, średnia arytmetyczna błędów wyniosła –6,6%, z odchyleniem standardowym 4,2%. Kolejny wariant uwzględniał korowanie pnia w miejscu pomiaru grubości; w tym przypadku średnia arytmetyczna błędów wyniosła –2,3%, z odchyleniem standardowym 4,3%. Ostatni wariant zakładał potrącenie procentowego udziału kory (wg normy 8,0%) od miąższości w korze obliczonej wzorem Hubera; w tym przypadku średnia wielkość błędów procentowych wtórnych wyniosła –2,8%, z odchyleniem standardowym 4,4%. Dla każdego z zastosowanych sposobów stwierdzono występowanie błędów systematycznych. Analogiczne badania dla świerka z położeń górskich (Sulej, Tomusiak 2018) również wskazują tendencję wzoru środkowego przekroju do generowania błędów systematycznych. We wszystkich przypadkach obserwowane jest zaniżanie miąższości. Przy tablicowym potrąceniu grubości kory miąższość dłużyc drewna wielkowymiarowego zaniżana jest średnio o 6,8%, przy potrącaniu grubości kory zmierzonej koromierzem – średnio o 5,5%, a potrącając procentowy udział kory – średnio o 3,8%.

Analiza dokładności wzoru środkowego przekroju dla strzał świerkowych bez kory (Schiffel 1902, za Gieruszyński 1953a) wykazała różnice w wielkości błędów w zależności od pełni strzał. Dla strzał o dużej pełni (niewłaściwa liczba kształtu równa 0,543) błędy procentowe wtórne wyniosły średnio 8,2%, dla strzał o mniejszej pełni ($f=0,488$) średnia wartość błędów wyniosła 5,7%, a dla strzał najbardziej pełnych ($f=0,345$) –17,4%. Największą dokładność uzyskano dla strzał o średniej pełni.

Bruchwald i in. (2018) ocenili dokładność wzoru środkowego przekroju dla kłód brzozy brodawkowatej o grubości w cieńszym końcu bez kory 18 cm (drewno wielkowymiarowe). W badaniach uwzględniono kłody o różnej długości (od 2,5 m do 6,0 m) oraz różnej lokalizacji na strzale (kłoda odziomkowa, kłoda środkowa). Dla wszystkich kłód odziomkowych średnia arytmetyczna błędów wyniosła –2,9%; w zależności od długości kłody wielkości błędów wynosi-

ły średnio od –5,4% (kłoda 6 m) do –0,8% (kłoda 2,5 m), co wskazuje na spadek dokładności wzoru Hubera wraz ze wzrostem długości kłody odziomkowej. Dla kłód środkowych wzór okazał się bardziej dokładny; średnia arytmetyczna błędów dla wszystkich brył dendrometrycznych wyniosła –0,1%, a w zależności od długości kształtowała się w zakresie od –0,2% (kłoda 3,0 m i 4,0 m) do 0,1% (kłoda 3,5 m).

W pracy Planka i Cahilla (1984) wzór środkowego przekroju zaniżał miąższość kłód sosny żółtej i wydumowej z terenu Kolorado, Arizony i Dakoty Południowej o około 2%. Został on zarekomendowany poprzez autorów do stosowania przy określaniu miąższości tych gatunków drzew.

Wyniki badań Figueiredo i in. (2000) dowodzą, iż wzór Hubera może być dokładny dla wielu gatunków drzew, różnych grup wiekowych, regionów geograficznych itp. Wzór ten może być stosowany do określania miąższości w większych przypadkach, gdzie kłoda ma długość większą niż 2 m.

Dokładność innych wzorów dendrometrycznych była rzadziej badana w porównaniu ze wzorem środkowego przekroju. W niniejszej pracy ocenie poddano łącznie osiem wzorów zwykłych dla strzał bez kory modrzewia. Do wzorów o największej dokładności można zaliczyć wzór Hubera, gdzie średnia arytmetyczna błędów wyniosła 0,8% z odchyleniem standardowym 6,8%. W dalszej kolejności należy wymienić wzór Hossfelda (1,4% \pm 4,6%), francuski (1,3% \pm 6,8%), Gieruszyńskiego (1,7% \pm 3,4%) oraz wzór dwupołówkowy (–3,1% \pm 3,1%). Znacznie niższą dokładnością charakteryzują się wzór kupiecki (–16,7% \pm 15,3%) oraz wzór Rieckiego-Newtona (22,8% \pm 9,8%). Wzorem dającym najmniejszą dokładność okazał się wzór Smaliana (66,6% \pm 30,6%). Zatem typowe wielkości błędów procentowych wtórnych nie odbiegały od średniej nie więcej niż 3,1%, dla wzoru dwupołówkowego (najmniejsza zmienność), do 30,6% dla wzoru Smaliana (największa zmienność).

Wszystkie badane wzory wykazały tendencję do generowania błędów systematycznych dla strzał modrzewia bez kory. Wzory Hubera, Smaliana, Hossfelda, Rieckiego-Newtona, francuski i Gieruszyńskiego zawyżały miąższość strzał bez kory, a wzorem wyraźnie odbiegającym dokładnością od pozostałych był wzór Smaliana, który zawyżał miąższość w pojedynczych przypadkach nawet do 209,5% (średnio o 66,6%). Dwa pozostałe wzory: kupiecki i dwupołówkowy wykazały stałą tendencję do zaniżania miąższości strzał bez kory modrzewia europejskiego; wzór kupiecki średnio o 16,7% a dwupołówkowy o 3,1%.

W pracy porównano również dokładność wzorów pomiędzy klasami wieku. Dla trzech wzorów Smaliana, Rieckiego-Newtona i kupieckiego zaobserwowano istotny wpływ wieku na wielkość uzyskiwanych błędów miąższości strzał bez kory. Istotne różnice dokładności tych wzorów stwierdzono dla grupy obejmującej V i starsze klasy wieku w porównaniu z klasami II, III i IV. W najstarszej grupie wiekowej dokładność wzorów Smaliana i Rieckiego-Newtona była mniejsza, a wzoru kupieckiego – większa.

Na podstawie Anova Friedmana stwierdzono istotne różnice w dokładności ocenianych wzorów. Dla większości analizowanych par wzorów wykazano istotne różnice w przeciętnych wielkościach błędów miąższości strzał bez kory modrzewia

europejskiego. Nie stwierdzono istotnych różnic między dokładnością wzoru francuskiego i Gieruszyńskiego, francuskiego i Hossfelda, Gieruszyńskiego i Hossfelda, Gieruszyńskiego i Hubera oraz między wzorem Hossfelda i Hubera.

W literaturze można znaleźć ocenę dokładności innych wzorów dendrometrycznych, najczęściej dla sosny zwyczajnej. Na uwagę zasługuje praca Turskiego (1996), w której przedstawiono dokładność dwudziestu ośmiu wzorów dendrometrycznych dla strzał sosny V klasy wieku z terenu LZD w Murowanej Goślinie. Wzór dwupołówkowy uzyskał średnią arytmetyczną błędów procentowych wtórnych na poziomie $-1,59\%$, gdzie błędy ujemne stanowiły $69,7\%$ zbiorowości. W niniejszej pracy średnia arytmetyczna błędów wzoru dwupołówkowego dla modrzewia również przyjęła wartość ujemną, która wyniosła $-3,1\%$. Błędy ujemne przeważały nad błędami dodatnimi, które zaobserwowano u $84,5\%$ drzew.

Jednym ze wzorów ocenianych w pracy Turskiego (1996) był wzór Gieruszyńskiego, dla którego średnia arytmetyczna błędów procentowych wtórnych wyniosła $0,64\%$. Rozkład błędów uwzględniał zbliżony odsetek wartości ujemnych ($44,9\%$ zbiorowości), jak i dodatnich ($55,1\%$ drzew). Ten sam wzór został zbadany również przez Meixnera (1994) w drzewostanach sosnowych w wieku 35, 77, 78 i 80 lat, uzyskał on następujące średnie wielkości błędów procentowych wtórnych: dla drzewostanu 35-letniego $2,03\%$, 77-letniego $0,68\%$, 78-letniego $0,45\%$ i 80-letniego $0,68\%$. W drzewostanie 35-letnim przeważały błędy dodatnie; w pozostałych liczba błędów dodatnich i ujemnych była podobna. W niniejszej pracy średnia arytmetyczna błędów procentowych wzoru Gieruszyńskiego dla strzał modrzewia bez kory kształtowała się na podobnym poziomie i wyniosła $1,7\%$. Przeważały błędy dodatnie, które stwierdzono dla $71,4\%$ drzew.

Ocenę wzoru Hossfelda przeprowadził Meixner (1994) na tym samym materiale empirycznym, na którym oceniał dokładność wzoru Hubera i Gieruszyńskiego. Średnia arytmetyczna błędów procentowych wtórnych wzoru Hossfelda dla strzał sosny w korze, dla drzewostanu 35 i 78-letniego, wyniosła $-5,6\%$. W drzewostanie 77-letnim wielkość tej miary przybrała wartość $-4,9\%$, a w drzewostanie 80-letnim $-4,7\%$. Zmienność błędów procentowych wtórnych mieściła się w przedziale od $4,7\%$, w drzewostanie 35-letnim, do $6,1\%$, w drzewostanie 78-letnim. W pracy Lemkego (1996) przy ocenie dokładności strzał sosnowych bez kory dla wzoru Hossfelda średnia arytmetyczna błędów procentowych wtórnych przyjęła wartość równą $1,3\%$ z odchyleniem standardowym $4,6\%$. Według badań Bruchwalda (1999) średnia arytmetyczna błędów wzoru Hossfelda dla strzał sosny w korze z Puszczy Piskiej wyniosła $-3,4\%$, gdzie 86% obserwacji uzyskało błędy ujemne. Z kolei dla strzał bez kory średnia arytmetyczna błędów wyniosła $2,1\%$ i 77% obserwacji uzyskało błędy dodatnie.

Jak podaje Bruchwald (1999) wzór Rieckiego-Newtona charakteryzuje się uzyskiwaniem dodatnich błędów miąższości. Znalazło to potwierdzenie w niniejszej pracy, gdzie średnia arytmetyczna błędów procentowych tego wzoru dla strzał modrzewia europejskiego wyniosła $22,8\%$.

Wzór Smaliana okazał się najmniej dokładnym wzorem do określania miąższości strzał bez kory modrzewia euro-

pejskiego. Średnia wielkość błędów procentowych wtórnych wyniosła aż $66,6\%$, z odchyleniem standardowym $30,6\%$. Dla wszystkich drzew stwierdzono błędy dodatnie, z których największa wartość wyniosła $209,9\%$. Podobne prawidłowości, wskazujące na wysokie zawyżanie miąższości strzał przy stosowaniu wzoru Smaliana, dostrzegli również inni badacze. Z badań Bruchwalda (1999) wynika, iż zarówno dla strzał sosnowych w korze, jak i bez kory wzór Smaliana daje bardzo duże błędy dodatnie, dochodzące nawet do 180% . Jak zaznacza Patterson i in. (1993) wzór Smaliana jest bardzo niedokładny przy określaniu miąższości kłody odziomkowej. W pracy Planka i Cahilla (1984) wzór Smaliana przeszacowuje miąższość kłód sosny żółtej i wydumowej z Kolorado, Arizony i Dakoty Południowej średnio o około 19% . W pracy Patterson i in. (2007) wzór Smaliana zawyżył miąższość kłód odziomkowych, różnych gatunków liściastych, o ponad 30% . Fraver i in. (2007) również odradzają stosowanie wzoru Smaliana, ponieważ stosując go do pomiaru rumoszu drzewnego można liczyć się z zawyżaniem miąższości średnio o 12% .

W literaturze brakuje publikacji na temat dokładności wzorów kupieckiego i francuskiego.

Wyniki niniejszej pracy wskazują na duże zróżnicowanie dokładności ocenianych wzorów. Jako przyczyny niedokładności wzorów dendrometrycznych Bruchwald (1999) wymienia: niedostosowanie wzoru do kształtu strzały w kierunku podłużnym, poprzecznym oraz błędy pomiarowe. Strzały drzew leśnych cechują się skomplikowanym kształtem (Gieruszyński 1948), dlatego też żaden ze wzorów zwykłych nie będzie w sposób dokładny oddawał ich miąższości.

Każdy z ocenianych wzorów jest iloczynem długości strzały i pola przekroju w określonym miejscu na strzale, bądź też średnią z kilku przekrojów na strzale. Gdyby wykorzystany w danym wzorze przekrój był przekrojem przeciętnym, to jego iloczyn wraz z długością bryły dendrometrycznej, stanowiłby rzeczywistą miąższość strzały. Im bardziej przekrój danego wzoru odbiega od przekroju przeciętnego, tym mniejsza dokładność wzoru, co oznacza mniejsze dopasowanie wzoru do kształtu strzały w kierunku podłużnym. Każdy ze wzorów zakłada, że przekrój poprzeczny stanowi pole koła. W rzeczywistości przekroje mierzonych drzew odbiegają od tego kształtu. Największa rozbieżność występuje w dolnych częściach strzał, gdzie występuje duża nieregularność pnia związana z obecnością napływów korzeniowych. Największego znaczenia nabiera to we wzorach, w których brana jest pod uwagę średnica dolna, co w niniejszej pracy zaobserwowano przy ocenie dokładności wzorów Smaliana i Rieckiego-Newtona. Przy dokonywaniu pomiarów elementów miąższości takich jak długość, średnica lub obwód można popełnić błędy wynikające z zastosowania źle wyskalowanych przyrządów lub braku staranności w trakcie pomiaru. Jak podaje Bruchwald (1999) szczególnie ważne jest dokładne wykonanie pomiaru grubości, ponieważ popełniony błąd przy tym pomiarze ma największy wpływ na końcowy wynik miąższości.

Warunki, w których rośnie drzewo, jego wiek i zabiegi hodowlane prowadzone w danym drzewostanie, różnicują kształt drzew leśnych (Gieruszyński 1953b), co w konsekwencji może wpływać na dokładność określania miąższości danym wzorem. Stąd też zalecane są dalsze badania nad do-

kładnością wzorów dendrometrycznych dla drzew reprezentujących różne warunki wzrostu.

Wzór środkowego przekroju, zwany również wzorem Hubera, z racji na jego dużą dokładność na tle innych wzorów dendrometrycznych i stosunkowo małą liczbę pomiarów, zalecany jest do powszechnego stosowania w leśnictwie. Wyniki niniejszej pracy dowodzą, że można go bez większych zastrzeżeń stosować również dla strzał bez kory modrzewia europejskiego.

5. Wnioski

- Miąższość strzał bez kory modrzewia europejskiego najdokładniej określana jest wzorem środkowego przekroju (średnia arytmetyczna błędów 0,8% z odchyleniem standardowym 6,8%). Podobną dokładnością charakteryzowały się wzory Hossfelda (1,4% ±4,6%), francuski (1,3% ±6,8%), Gieruszyńskiego (1,7% ±3,4) oraz wzór dwupołówkowy (−3,1% ±3,1).

- Nie zaleca się stosować wzorów: kupieckiego (−16,7% ±15,3%), Rieckiego-Newtona (22,8% ±9,8%) i wzoru Smaliana (66,6% ±30,6%), które przy określaniu miąższości strzał bez kory modrzewia europejskiego charakteryzują się dużą wielkością i zmiennością błędów.

- Wszystkie wzory wykazały tendencję do generowania błędów systematycznych. Wzory Hubera, Smaliana, Hossfelda, Rieckiego-Newtona, francuski i Gieruszyńskiego zawyżały miąższość strzały bez kory. Natomiast wzory kupiecki i dwupołówkowy charakteryzowały się stałą tendencją do zaniżania wyników.

- Dla wzoru Smaliana, Rieckiego-Newtona i kupieckiego zaobserwowano wpływ wieku na dokładność uzyskanych wyników. Dla pozostałych wzorów, tj. Hubera, Hossfelda, Gieruszyńskiego, francuskiego i dwupołówkowego, nie zaobserwowano wpływu tego czynnika na przeciętną wielkość błędów.

- W pięciu przypadkach dokładność wzorów kształtowała się na podobnym poziomie. Zaobserwowano to przy porównaniu dokładności wzoru francuskiego i Gieruszyńskiego, francuskiego i Hossfelda, Gieruszyńskiego i Hossfelda, Gieruszyńskiego i Hubera oraz między wzorem Hossfelda i Hubera.

- Wyniki niniejszej pracy dowodzą, że wzór środkowego przekroju, zalecany do powszechnego stosowania w leśnictwie z uwagi na nieskomplikowany wzór i małą liczbę pomiarów, charakteryzuje się również wysoką dokładnością i można go bez większych zastrzeżeń stosować dla strzał bez kory modrzewia europejskiego.

Konflikt interesów

Autorzy deklarują brak potencjalnych konfliktów.

Źródła finansowania badań

Badania sfinansowano ze środków własnych autorów.

Literatura

- Bruchwald A. 1999. Dendrometria. Wydawnictwo SGGW, Warszawa, 261 s. ISBN 83-00-02889-7.
- Bruchwald A., Zasada M. 2010. Model wzrostu modrzewia europejskiego (*Larix decidua* Mill.). *Sylvan* 154(9): 615–624. DOI 10.26202/sylvan.2015006.
- Bruchwald A., Dmyterko E., Witkowska J., Jodłowski K. 2018. Sposoby określania miąższości kłód brzozy brodawkowatej (*Betula pendula* Roth). *Sylvan* 162(6): 443–451. DOI 10.26202/sylvan.2018052.
- Figueiredo A., Machado SA., Carneiro MRA. 2000. Testing accuracy of log volume calculation procedures against water displacement techniques (xyloimeter). *Canadian Journal of Forest Research* 30(6): 990–997. DOI 10.1139/x00-006.
- Fraver S., Ringvall A., Jonsson B. 2007. Refining volume estimates of down woody debris. *Canadian Journal of Forest Research* 37(3): 627–633. DOI 10.1139/X06-269.
- Gieruszyński T. 1948. Formuły miąższościowe dla drzew ściętych. *Sylvan* 92(2/4): 190–203.
- Gieruszyński T. 1953a. O dokładności wzoru Hubera. *Sylvan* 97(4): 258–268.
- Gieruszyński T. 1953b. O kształcie strzał drzew leśnych. *Sylvan* 92(2/4): 204–247.
- Grodzki M. 1968. Ocena dokładności wzoru Hubera przy pomiarze dłużyc kopalniakowych. *Prace Instytutu Badawczego Leśnictwa* 358/362: 25–43.
- Lemke J. 1981. Dokładność określania miąższości strzał sosnowych przy użyciu zwykłych wzorów dendrometrycznych. *Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk* 57: 77–85.
- Meixner J. 1994. Praktyczna dokładność wzoru Gieruszyńskiego w porównaniu z innymi wzorami dendrometrycznymi. *Sylvan* 138(4): 5–14.
- Patterson D., Wiant H., Wood G. 1993. Errors in estimating the volume of butt logs. *Forest Products Society* 43(3): 41–43.
- Patterson D., Doruska P., Hartley J., Hurd M. 2007. Validating the Patterson and Doruska equation for estimating the volume of hardwood butt logs. *Forest Products Society* 57(1): 67–70.
- Plank M., Cahill J. 1984. Estimating cubic volume of small diameter tree-length logs from ponderosa and lodgepole pine. *Forest Service*. Note PNW-RN-417. DOI 10.2737/PNW-RN-417.
- Polkowski K., Zarzyński P., Tomusiak R. 2019. Dokładność określania miąższości dłużyc bez kory według normy PN-D-95000:2002 na przykładzie sosny zwyczajnej (*Pinus sylvestris* L.) z terenu Nadleśnictwa Płaska. *Sylvan* 163(6): 460–468. DOI 10.26202/sylvan.2018164.
- Sulej J., Tomusiak R. 2018. Wpływ sposobu redukcji grubości kory i zaokrąglania wyników na dokładność określania miąższości dłużyc świerka pospolitego z położeń górskich. *Studia i Materiały CEPL* 56(2): 129–138.
- Szramka J. 1977. Rola hodowlana modrzewia w warunkach RDLP Gdańsk. *Sylvan* 141(7): 37–43.
- Turski M. 1996. Przydatność niektórych wzorów dendrometrycznych do określania miąższości bez kory strzał sosny V klasy wieku. *Sylvan* 140(7): 61–68.
- Wiant H., Jr. Patterson D., Hassler C., Wood G., Rennie J. 1996. Comparison of formulas for estimating volumes of butt logs of Appalachian hardwoods. *Northern Journal of Applied Forestry* 13(1): 5–7. DOI 10.1093/njaf/13.1.5

Wkład autorów

RT – koncepcja pracy: analiza statystyczna, końcowa edycja tekstu; ŁH – przegląd literatury, obliczenia, analiza statystyczna, napisanie pracy, końcowa edycja tekstu.